Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas I (MA1111)
Ene-Mar 2022
Secciones 13, 14 y 15

3$^{\text{er}}$ Examen Parcial (25 %)

Pregunta 1. (3 ptos.) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{8}(x+1)^2 + \dfrac{35}{8} & \text{, si } x < 2 \\ b & \text{, si } x = 2 \\ m(x-5)+1 & \text{, si } x > 2 \end{cases}$$

determine todos los valores de las constantes b y m para los cuales:

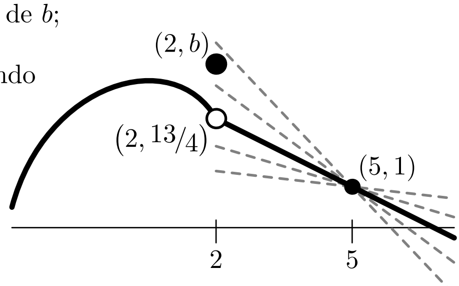
- f posee una discontinuidad removible en $x = 2$;
- f posee una discontinuidad por salto en $x = 2$;
- f es continua en $x = 2$.

Solución: Notemos que

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \left(-\frac{1}{8}(x+1)^2 + \frac{35}{8} \right) = \frac{13}{4},$$

cualquier recta cuya ecuación es $y = m(x-5)+1$ pasa por el punto $(5,1)$ y, en particular, la recta que pasa por los puntos $(5,1)$ y $\left(2, {}^{13}/_{4}\right)$ tiene pendiente igual a $-{}^{3}/_{4}$. Así,

- f posee una discontinuidad removible en $x = 2$ siempre que $m = -{}^{3}/_{4}$ y $b \neq {}^{13}/_{4}$;
- f posee una discontinuidad por salto en $x = 2$ siempre que $m \neq -{}^{3}/_{4}$, sin importar el valor de b;
- f es continua en $x = 2$ sólo cuando $m = -{}^{3}/_{4}$ y $b = {}^{13}/_{4}$.



Pregunta 2. (2 ptos.) Determine todos los valores de la constante a para los cuales la función

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}(x-2)^2 + 8 & , \text{si } x \leq 5 \\[2ex] \dfrac{3}{2}(x-6)^2 + a & , \text{si } x > 5 \end{cases}$$

es derivable en todo su dominio.

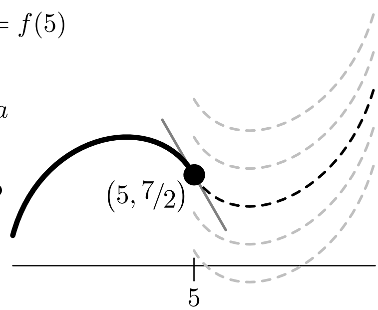
Solución: Notemos que f es derivable en $(-\infty, 5)$ y en $(5, \infty)$ ya que esos intervalos su expresión viene dada por $-\dfrac{1}{2}(x-2)^2 + 8$ y $\dfrac{3}{2}(x-6)^2 + a$, respectivamente, las cuales son composición de funciones derivables independientemente del valor que tome a.

Para que f sea derivable en $x = 5$, necesariamente debe ser continua en ese punto. Como,

$$\lim_{x \to 5^-} f(x) = \lim_{x \to 5^-} \left(-\frac{1}{2}(x-2)^2 + 8 \right) = \frac{7}{2} = f(5)$$

$$\lim_{x \to 5^+} f(x) = \lim_{x \to 5^-} \left(\frac{3}{2}(x-6)^2 + a \right) = \frac{3}{2} + a$$

se tiene que, f es continua en $x = 5$ si, y sólo si, $a = 2$.



Luego,

$$\lim_{x \to 5^-} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x \to 5^-} \frac{-\frac{1}{2}(x-2)^2 + 8 - \frac{7}{2}}{x - 5} = \lim_{x \to 5^-} \Big(-(x-2) \Big) = -3$$

$$\lim_{x \to 5^+} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x \to 5^+} \frac{\frac{3}{2}(x-6)^2 + 2 - \frac{7}{2}}{x - 5} = \lim_{x \to 5^+} \Big(3(x-6) \Big) = -3$$

indicando que el límite $\displaystyle\lim_{x \to 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5}$ existe. Por lo tanto, f también es derivable en $x = 5$.

Pregunta 3. (6 ptos.) Dada la función

$$f(x) = \sqrt[5]{\operatorname{sen}^8\left(4\left(x^5+2x-1\right)\left(g(x)\right)^3\right)}$$

donde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función derivable en todo su dominio, halle $f'(x)$.

Solución:

$$f'(x) = \frac{8}{5}\operatorname{sen}^{3/5}\left(4\left(x^5+2x-1\right)\left(g(x)\right)^3\right)\cos\left(4\left(x^5+2x-1\right)\left(g(x)\right)^3\right)$$
$$4\left(\left(5x^4+2\right)\left(g(x)\right)^3 + \left(x^5+2x-1\right)3\left(g(x)\right)^2 g'(x)\right)$$

Pregunta 4. (4 ptos.) Sea h una función derivable en todas partes y su derivada es una función positiva que también es derivable en todas partes. Considere la función

$$f(x) = \frac{h(x)-4}{h'(x)+2}$$

Si $f(a) = 0$ y $h'(a) = 3$, calcule $f'(a)$.

Solución: Podemos reescribir la relación entre las funciones f y h como

$$\left(h'(x)+2\right) f(x) = h(x) - 4$$

y derivar ambos lados de la igualdad repecto de la variable x para obtener la ecuación

$$h''(x)\, f(x) + \left(h'(x)+2\right) f'(x) = h'(x).$$

Evaluando en $x = a$ se obtiene que

$$h''(a)\, \underbrace{f(a)}_{=0} + \left(\underbrace{h'(a)}_{=3} + 2\right) f'(a) = \underbrace{h'(a)}_{=3}$$

de donde despejamos el valor $f'(a) = 3/5$.

Pregunta 5. (6 ptos.) Dada la función

$$f(x) = \tan^5\left(\left(g^{-1}\left(x^3+3\right)\right)^3 \sqrt{x^2+2}\right) + 5$$

donde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función inyectiva, derivable y su derivada nunca vale cero, halle $f'(x)$.

Solución:

$$f'(x) = 5\tan^4\left(\left(g^{-1}\left(x^3+3\right)\right)^3 \sqrt{x^2+2}\right) \sec^2\left(\left(g^{-1}\left(x^3+3\right)\right)^3 \sqrt{x^2+2}\right)$$
$$\left(3\left(g^{-1}\left(x^3+3\right)\right)^2 \frac{3x^2}{g'\left(g^{-1}(x^3+3)\right)} \sqrt{x^2+2} + \left(g^{-1}\left(x^3+3\right)\right)^3 \frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}\right)$$

Pregunta 6. (4 ptos.) Si y está definida implícitamente en términos de x mediante la ecuación

$$\left(x^2-y\right)\left(y^2-x\right) = x^{a/b}\, y^{b/a} + ab$$

donde las constantes a y b son números enteros distintos de cero, halle $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Solución: Derivando implícitamente ambos lados de la igualdad obtenemos

$$\left(2x - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\left(y^2-x\right) + \left(x^2-y\right)\left(2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 1\right) = \frac{a}{b}\, x^{\frac{a}{b}-1}\, y^{\frac{b}{a}} + x^{\frac{a}{b}}\, \frac{b}{a}\, y^{\frac{b}{a}-1} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

de donde

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\left(\frac{2xy^2 - 3x^2 + y - \frac{a}{b}\, x^{\frac{a}{b}-1}\, y^{\frac{b}{a}}}{2x^2y - 3y^2 + x - \frac{b}{a}\, x^{\frac{a}{b}}\, y^{\frac{b}{a}-1}}\right)$$